

Code-épreuve 030

MATHÉMATIQUES

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

-I-

Au 1^{er} janvier de l'année 2000, M. Abramov a placé une somme S à la banque SASKI qui refuse de servir des taux qui permettent de doubler un capital en moins de trois ans.

Intérêts composés

1. Déterminer la somme capitalisée au 1^{er} janvier 2007 si la banque lui assure un taux annuel fixe¹ $t \in]0, 1[$.
2. M. Abramov veut connaître le taux mensuel t_m correspondant au taux t entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2007. Il vous demande donc de déterminer t_m en fonction de t .
3. Déterminer une valeur approchée à la deuxième décimale du taux mensuel en pourcentage si le taux annuel en pourcentage est de 7%.

Avec des retraits

M. Abramov retire, tous les 1^{er} janvier à 8h depuis 2001, un proportion fixe $t' \in [0, 1[$ des intérêts capitalisés.

1. Quelle sera la somme présente sur le compte de M. Abramov au 1^{er} janvier 2007 à 9h en fonction de S , t et t' ?
2. Déterminer le taux mensuel τ_m équivalent au système de « capitalisation-retraits » défini ci-dessus.
3. Calculer t' pour que le taux mensuel τ_m en pourcentage soit de 0,5% si le taux de rémunération en pourcentage est de 7%.
4. On suppose que $t' = t$. Déterminer t pour que τ_m soit maximal. Le banquier acceptera-t-il ce taux ?

¹ Intérêts capitalisés au 1^{er} janvier à 0 h 00.

-II-

On considère la famille $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions numériques définies pour tout $x \in [0; 100]$ par :

$$f_m(x) = 10^{m \times \left(\frac{\log(100+x) - 2}{12} \right)}$$

où $\log(y)$ est le logarithme en base 10 de $y \in]0; +\infty[$.

1. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 100]$ on a :

$$f_m(x) = \exp \left[\frac{m}{12} \ln \left(1 + \frac{x}{100} \right) \right]$$

Donner une interprétation de f_m .

2. Étudier les fonctions f_m , puis démontrer qu'elles sont bijectives.
Déterminer leurs inverses f_m^{-1} , puis calculer $f_m^{-1}(1,05)$ en fonction de m .
Puis calculer $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m^{-1}(1,05)$
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels m tels que $f_m(10) > 1,05$.
4. On note C_m la courbe représentative de la fonction f_m .
Déterminer l'équation de la tangente T_m au point de C_m d'ordonnée 1,05.
Déterminer l'ensemble des $m \in \mathbb{N}^*$ tels que la pente de la tangente T_m soit strictement supérieure à 1.

-III-

Soit T une variable aléatoire prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 selon la loi uniforme.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X définie par :

$$X = \exp \left[\frac{1}{12} \ln \left(1 + \frac{T}{100} \right) \right]$$

Calculer l'espérance et la variance de X .

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
Exprimer $X_1 X_2$, puis déterminer l'espérance et la variance de $X_1 X_2$.

-IV-

L'institut α propose une préparation au concours d'entrée à l'école β .

L'institut autorise les élèves non reçus à l'issue d'une préparation à s'inscrire une seconde fois aux cours dispensés par l'institut α .

Pour les années 2005 et 2006, les résultats obtenus par l'institut α sont :

	2005		2006	
	présentés	admis	présentés	admis
non-redoublants	44	24	30	15
redoublants	6	6	20	18
total	50	30	50	33

Le responsable de l'institut α affirme que le taux de réussite est en augmentation entre 2005 et 2006 et s'en félicite.
Le responsable pédagogique de la préparation n'est quant à lui pas du tout satisfait de l'évolution qu'il constate.

1. Qu'a constaté le responsable pédagogique ?
2. Qui, du responsable de l'institut ou du responsable pédagogique, a raison ?